К проблеме оснований математики[1]

Мальчики играют на горе,
Сотни тысяч лет они играют.
Умирают царства на Земле,
Игры — никогда не умирают.

Из обилия возможных проблем, связанных с основаниями математики я выбираю только три.

Почему человечество (с необходимостью, присущей случаю) должно было придумать математику?

Почему математика должна быть устроена аксиоматически?

Почему знание математики не гарантирует умения ею пользоваться в конкретном проектировании систем?

1. Почему человечество (с необходимостью, присущей случаю) должно было придумать математику? Мечты о могуществе и бессмертии рождают странные миры: мир мифов, мир сказок, мир художественной литературы, мир музыки и т.п., которые можно назвать МИРАМИ ИСКУССТВА или ИСКУССТВЕННЫМИ МИРАМИ. К числу таких искусственных миров и принадлежит мир математики. Каждый из искусственных миров НЕОБХОДИМ ЧЕЛОВЕЧЕСТВУ, но остается неясным:

«Почему человечество должно было ПРИДУМАТЬ эти миры и какую роль в истории человечества играют эти миры?»

Я полагаю, что ответ на вопрос о возникновении подобного искусственного мира, известного как МИР МАТЕМАТИКИ, не может быть получен без ответа на более ОБЩИЙ ВОПРОС об искусственных мирах В ЦЕЛОМ.

---

[1] Автор: П.Г. Кузнецов. Текст публикуется согласно изданию: Проблемы и решения. № 1, 1996. — «Концепт». — с. 22–31.

Если миры искусства весьма уважают чувство юмора, то только отсутствие этого чувства в большинстве «математических» работ лишает их того очарования, которое традиционно связано с каждым миром искусства.

Яростная дискуссия об основаниях математики, противостояние математических школ, лишает эту область ТВОРЧЕСТВА заслуженного уважения современников. Само собою разумеется, что только отсутствие чувства юмора не позволяет с шуткой на устах обсуждать проблему НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ математических теорий. Здесь как в тюрьме — «вологодский конвой шутить не любит: шаг вправо, шаг влево считается за побег — конвой применяет оружие без предупреждения!». И совсем не случайно участие математиков в различных «правозащитных движениях».

То, что я пытаюсь обсудить в этом математическом эссе, уже давно известно как литературный прием, названный Шкловским «ОСТРАНЕНИЕ», что можно понимать как «остраненный взгляд» или «взгляд со стороны».

Создатели всех искусственных миров, как отметил еще Николай Кузанский, реализуют замысел Творца и в этом смысле ему подобны в своих актах Творчества. Не составляет исключения и мир математики.

Два тысячелетия мы храним художественное наследие древних греков и столько же времени мы храним их наследие из мира математики. Уже архитектурные формы, созданные из камня, не выдерживают испытания текущим временем, а греческие тексты — как из мира искусства, так и из мира математики — оказались поистине НЕТЛЕННЫМИ. Но именно там, два тысячелетия тому назад, мы встречаемся в объектом, на который не действует ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ — это мир ИДЕЙ в том смысле, как их понимал Платон. И математика чтит эту традицию, сохраняя за одним из своих созданий имя «платоновых тел». Нет Платона, но живут и будут жить вечно — «платоновы тела»!

Один из моих друзей, А.Н. Лук, как психолог, весьма активно изучал вопрос о чувстве юмора и остроумия, но эти работы не попадали на страницы математических изданий. Другой мой друг, философ Э.В. Ильенков, придумал «думающую машину», которая в некотором машинном царстве-государстве выполняла должность Главного Специалиста по борьбе со смехом. Эта машина носила серьезное имя — «Квантифицирующий Импотенсификатор Смехогенных Аппроксимаций», что давало фамильярное сокращение «КИСА». В мире философов все знали, кто носил кличку «киса». К сожалению и эти работы не стали достоянием математики.

Хотя придуманных миров довольно много, мы стоим перед необходимостью выделить из этого РОДА тот ВИД, который и именуется математикой. Это мир «идеальных объектов», которые обладают уникальным свойством — они «остаются тождественными САМИ СЕБЕ». В этом смысле на объекты математики НЕ ДЕЙСТВУЕТ ВРЕМЯ, они обладают как бы «вневременным бытием».

Такие объекты, как прямая линия, квадрат, окружность и т.д. не могут быть «физически изготовлены», все они «чистые произведения мысли», но отличаются от всех других произведений мысли именно своей тождественностью самим себе. Нелепая попытка некоторых физиков отождествлять «прямую линию» с траекторией солнечного луча опровергается каждым школьником, который знает эффект рефракции и знает, что солнечный луч при закате «загибается». Это отклонение солнечного луча от математической «прямой линии» означает, что «прямая» в сознании школьника математичнее, чем у некоторых физиков.

А. Пуанкаре полагал, что первой математической абстракцией является абстракция «абсолютно твердого тела», а «прямая линия» может быть определена не проще, чем через «ось вращения абсолютно твердого тела». Продолжение изложения «мнений» о математике может быть продолжено до бесконечности, но нас не интересуют «мнения».

Этот мир неизменных объектов, тождественных самим себе, в форме циклов и эпициклов послужил Птолемею для ПРЕДСКАЗАНИЯ Солнечных и Лунных затмений, а также для ПРЕДСКАЗАНИЯ моментов весеннего и осеннего равноденствий, знание которых давало возможность ПРЕДСКАЗАВАТЬ разлив Нила. Связь «математического мира» и наблюдаемых явлений природы и породила профессию ЖРЕЦОВ, которые и являются подлинными прародителями современной математики.

Когда на историческом горизонте возникает фигура Кеплера, то не только изменяется «картина мира», но траектории планет ОТОЖДЕСТВЛЯЮТСЯ с эллипсом планетной орбиты. Этот НЕИЗМЕННЫЙ ЭЛЛИПС — и есть ПЕРВЫЙ закон ПРИРОДЫ, зафиксированный на первых шагах науки нового времени. Здесь мы видим, что если НЕЧТО, наблюдаемое в природе, мы можем ОТОЖДЕСТВИТЬ с некоторым объектом математики, то этот математический объект явится ПРАВИЛОМ, на которое не действует ВРЕМЯ. Но такое свойство и есть то, что мы с этого времени будем называть ЗАКОНОМ ПРИРОДЫ.

Есть большая правда в том, что природа говорит с нами на «языке математики», но не надо забывать, что ЗАКОНЫ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ не есть математические символы, изображенные на небесном своде. Создание мира неизменных объектов впервые позволило человечеству освоить понятие «ЗАКОНА ПРИРОДЫ», как чего-то такого, что СУЩЕСТВУЕТ как не подверженное ходу действительного ВРЕМЕНИ.

Так человечество встретилось с «писанием ЗАКОНОВ». Но нетрудно заметить разницу между законами Кеплера и законами юристов, которые считаются большими мастерами по «писанию законов». Один из моих оппонентов, более четверти века тому назад, утверждал, что законы издает Верховный Совет СССР. Я поинтересовался : «Не может ли Верховный Совет СССР отменить, например, законы Ньютона?». Мой оппонент пришел в замешательство, и я не могу отказать себе в удовольствии процитировать Гегеля, ярко обрисовавшего подобных борзописцев:

«Можно при этом отметить особую форму нечистой совести, проявляющуюся в том виде красноречия, которым кичится эта поверхностность; причем прежде всего она сказывается в том, что там, где в ней более всего ОТСУТСТВУЕТ ДУХ, она более всего говорит о ДУХЕ; там, где она наиболее МЕРТВЕННА и СУХА, она чаще всего употребляет слова ЖИЗНЬ и ВВЕСТИ В ЖИЗНЬ, где она проявляет величайшее, свойственное пустому высокомерию СЕБЯЛЮБИЕ, она чаще всего говорит о НАРОДЕ.

Но особо ее отличает НЕНАВИСТЬ К ЗАКОНУ. В том, что право и нравственность и подлинный мир права и нравственного постигают себя посредством МЫСЛИ, посредством мысли сообщают себе форму РАЗУМНОСТИ, а именно ВСЕОБЩНОСТЬ и ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ, в этом, в ЗАКОНЕ, это чувство, оставляющее за собой право на произвол, эта совесть, перемещающее правое в область субъективного убеждения, с полным основанием видит наиболее враждебное для себя. ФОРМА ПРАВОГО как ОБЯЗАННОСТИ и ЗАКОНА воспринимается этим чувством как МЕРТВАЯ, ХОЛОДНАЯ БУКВА, как ОКОВЫ, ибо оно не познает в нем самого себя, не познает себя в нем свободным, поскольку закон есть разум предмета, и этот разум не дозволяет чувству согреваться своей собственной частной обособленностью. Поэтому ЗАКОН, как мы отметили где-то в данной работе (с. 258), — тот признак, по которому можно отличить ложных братьев и друзей так называемого народа». (Г. Гегель. «Философия права». — М.: Мысль, 1990. — с. 50).

В истории математики тоже существовало такое время, когда со словом ЗАКОН ассоциировался не инвариантный объект, тождественный сам себе, а лишь ПРАВИЛО, по которому одному математическому объекту ставился во «взаимно однозначное соответствие» — другой математический объект. В настоящее время вся совокупность таких правил рассматривается (говоря языком геометрии), как ПРАВИЛА преобразования координат, а то, что остается при преобразованиях координат БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ и есть ИНВАРИАНТ.

Координатные представления теперь отождествляют с той или иной субъективной точкой зрения (в физике — это различие «наблюдателей»), а ИНВАРИАНТ — это то, что не зависит от частной точки зрения. Но именно ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ и есть то, что не зависит от точки зрения того или иного человека, причисляющего себя или не причисляющего себя к сообществу мировой науки.

Итак, если бы человечество не создало мира математики, то оно никогда не смогло бы обладать НАУКОЙ. Только мир математики и позволил человечеству получить понятие «ЗАКОН», как то, над чем не властно даже все разрушающее

ВРЕМЯ. Это и есть ответ на наш первый вопрос: «Почему человечество (с необходимостью, присущей случаю) должно было придумать математику?»

Не следует думать, что описанное выше принадлежит автору статьи: известно библейское выражение — «и это было...». В подтверждение сказанного приведем текст более чем двухсотлетней давности:

«...Всякая наука о природе в СОБСТВЕННОМ смысле нуждается, следовательно, в ЧИСТОЙ части, чтобы на ней могла основываться аподиктическая достоверность, которую ищет в науке разум; и так как в этой части принципы совершенно иного рода, чем чисто эмпирические, то будет также чрезвычайно полезно, более того, по существу дела в методологическом отношении совершенно обязательно излагать эту часть отдельно, вовсе не вдаваясь в другую, и притом по возможности излагать во всей ее полноте, дабы можно было совершенно точно определить, что же разум способен дать сам по себе и где его способность начинает нуждаться в помощи эмпирических принципов. Чистое познание разумом из одних лишь ПОНЯТИЙ называется чистой философией или метафизикой; а то, которое основывает свое познание лишь на КОНСТРУИРОВАНИИ понятий, изображающих предмет в априорном созерцании, называется математикой...

...я утверждаю, что в любом частном учении о природе можно найти науки в СОБСТВЕННОМ смысле лишь столько, сколько имеется в ней МАТЕМАТИКИ. Ведь согласно сказанному, наука в собственном смысле, в особенности же естествознание, нуждается в чистой части, лежащей в основе эмпирической и опирающейся на априорное познание природных вещей. Познать же что-либо *a priori* — значит познать это на основе одной только возможности...

...Но познание разумом, основанное на конструировании понятий, есть познание математическое. Следовательно, чистая философия природы вообще, т.е. такая, которая исследует понятие природы вообще, хотя и возможна без математики, но чистое учение о природе, касающееся ОПРЕДЕЛЕННЫХ природных вещей (учение о телах и учение о душе), возможно лишь посредством математики; и так как во всяком учении о природе имеется науки в собственном смысле лишь столько, сколько имеется в ней априорного познания, то учение о природе будет содержать науку в собственном смысле лишь в той мере, в какой может быть применена в нем математика...». (И. Кант. Соч. Т.6. — М.: Мысль, 1966. — с. 55–57).

Перейдем к обсуждению второго вопроса.

2. Почему математика устроена аксиоматически? Для начала приведем несколько «аксиом», которые вне геометрии принято называть «исходными правильными формулами».

Рассмотрим три выражения:

$1 + 1 = 2$;

$1 + 1 = 1$;

$1 + 1 = 0$.

Можно ли доказать «истинность» этих «исходных правильных формул»?

Хотя мои контакты с П.С. Новиковым были порождены проблемами квантовой химии, но мой собеседник был известен как знаток «алгоритмически неразрешимых проблем». Естественен и мой интерес к этим проблемам. Все три приведенные выше формулы и представляют собой иллюстрацию проблем этого вида. Философская наивность Д. Гильберта в попытках доказать «непротиворечивость арифметики» — естественное следствие членения наук по «факультетам». Не менее наивно представление о выпускнике философского факультета университета, что дипломант имеет на руках удостоверение «философа». Как математика, так и философия развиваются человечеством уже много более двух тысячелетий и имеются трудности в освоении этих двух областей.

Все три приведенные формулы мы можем привести к общему виду. Для этого заменим одинаковые выражения в левых частях буквой *А*. Поскольку все правые части отличаются по написанию от левой, а также друг от друга, то заменим их соответственно буквами *B, C, D*.

$A = B$;

$A = C$;

$A = D$.

Следуя за Гильбертом (но не за Брауэром и Вейлем), попробуем использовать принцип «исключенного третьего».

Относительно любой буквы справа мы можем задавать вопрос: «Есть ли она буква *А* «или» не-*А*?». Совершенно очевидно, что мы три раза получим ответ: «не-*А*»!

Запишем этот результат. Все формулы приобретают один и тот же вид:

$A =$ не-A;

$A =$ не-A;

$A =$ не-A.

Нетрудно видеть, что ЛЮБАЯ ИСХОДНАЯ ПРАВИЛЬНАЯ ФОРМУЛА, у которой правая часть от знака равенства только ПО НАПИСАНИЮ отличается от левой части от знака равенства, в соответствии с «законом исключенного третьего» будет приведена к ПРОТИВОРЕЧИЮ.

Этот факт был всегда известен серьезным математикам, что привело к предложению О. Веблена и Дж. Юнга в их «Проективной геометрии» начала нашего века заменить математический термин «аксиома» на более подходящий термин «ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ».

Однако, как известно тоже около двухсот лет в философии, каждому ПОЛОЖЕНИЮ соответствует некоторое ПРОТИВОПОЛОЖЕНИЕ (по-немецки первому соответствует термин *Satz,* а второму *Gegensatz*), что предполагает НЕОБХОДИМОСТЬ рассматривать КАЖДОЕ положение вместе с его противоположением. Если классические аксиомы геометрии, как систему предположений, отождествить с именами творцов математики, то мы получим СДВОЕННЫЕ геометрии:

Евклидова и не-евклидова,

Архимедова и не-архимедова,

Дезаргова и не-дезаргова,

Паскалева и не-паскалева, и т.д.

В философии за термином «КАТЕГОРИАЛЬНАЯ ПАРА» стоит утверждение, в котором встречаются ДВА ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ ПРЕДИКАТА. Именно противоположные предикаты и носят название «категориальных пар». Первый шаг к рассмотрению «категориальных пар» в математике был совершен Н.И. Лобачевским и Я. Бойяи. Но это и был тот шаг, который демонстрирует ПЕРЕХОД от традиционной математической логики к логике диалектической. Про последнюю наговорено столько нелепостей, что о ее значении для МАТЕМАТИКИ почти ничего не известно. Диалектическая логика — это логика, которая относится ТОЛЬКО к аксиомам или ПРЕДПОЛОЖЕНИЯМ математических теорий. Лучше всего об этом в своем философском конспекте писал Н.И. Лобачевский:

«Общая логика называется также АНАЛИТИКОЮ, равно как и прикладная логика — ДИАЛЕКТИКОЮ»

(Н.И. Лобачевский. Научно-педагогическое наследие. — М.: Наука, 1976. —. с. 581)

В этом же конспекте он демонстрирует полное понимание различия мира математических объектов от объектов окружающего мира: он понимает, что математические следствия из математических предположений всегда были, есть и будут «истинными в математическом смысле». Но наличие ВОЗМОЖНОГО противоречия выводов из математической теории с реальностью только указывает, что мы используем теорию за границами нами же установленных ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ. Аналогичную позицию по отношению к математическим теориям занимал и Дж.К. Максвелл.

Только удержание в поле зрения как положений, так и противоположений, ОБЕРЕГАЕТ наше математическое мышлению от догматизма. Здесь же и расположена область математического творчества: либо мы рассматриваем в известной области некоторое противоположение, на которое ранее не обращалось внимания, либо мы порождаем новую аксиоматическую пару, создавая новое математическое направление.

Учитывая, что в основаниях геометрии Д. Гильберта представлено всего 16 аксиом, то, рассматривая их парами, мы можем получить 2^{16} геометрий! Но мы до сих пор не научились «узнавать их в лицо». Здесь и случилось то, что «освоив» аксиоматический метод, некоторые «математики», как правильно заметили Н. Бурбаки в своей «Архитектуре математики», кинулись «творить». Они пишут:

«Мы были свидетелями также, особенно в то время, когда аксиоматический метод только что начал развиваться, расцвета уродливых структур, ПОЛНОСТЬЮ ЛИШЕННЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ, единственное достоинство которых заключалось в том, что, изучая их, можно было дать точную оценку значимости каждой аксиомы, выясняя, что происходит, когда эту аксиому удаляют или видоизменяют. Очевидно, в тот период можно было поддаться искушению и сделать вывод, что это — единственные результаты, которые следует ожидать от этого метода» (Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. — М.: ИЛ, 1962. — с. 257).

Основной вывод из этого раздела состоит в том, что любое высказывание, утверждение или ПОЛОЖЕНИЕ, высказанное на естественном языке, не является той ЛОГИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ, в которой выражается ИСТИНА. Не существует НИ ОДНОГО ВЫСКАЗЫВАНИЯ («ПОЛОЖЕНИЯ»), которое может быть ФОРМОЙ выражения ИСТИНЫ. Значительно труднее освоится с ОТРИЦАНИЕМ этого положения, выраженным в диалектической форме. Всякая исходная логическая форма, содержащая ПРОТИВОРЕЧИЕ, является той формой, в которой фиксируется «исходная правильная формула». Мы это демонстрировали в виде трех формул в начале этого раздела:

$1 + 1 = 2;$

$1 + 1 = 1;$

$1 + 1 = 0.$

Математический СМЫСЛ этих трех утверждений весьма прост. Первая формула принадлежит арифметике. Вторая — это формула алгебры Буля, утверждающая, что «универсальное множество (обозначенное как «1») будучи сложено с самим собой — есть то же самое универсальное множество». Третья формула определяет сложение по модулю 2.

Хотя каждая из формул приводится к виду:

A = не-A,

а именно таковы все «исходные правильные формулы», мы знаем, что ОДНОВРЕМЕННО должно выполняться и положение:

$A = A$.

Работ с высказыванием или положением, которое имеет вид математической аксиомы, сопровождает процесс ОСМЫСЛИВАНИЯ:

«*A* есть *B*» и «*B* есть *A*» — отождествление.

Оно означает РАВЕНСТВО *A* и *B* в некотором «отношении». Но одновременно с этим существует еще и НЕРАВЕНСТВО *A* и *B*:

«*A* не-есть *B*» и «*B* не-есть *A*» — противопоставление.

Стандартное представление этих двух ПРОТИВОположений принято в тензорном анализе, где ИНВАРИАНТ — есть то, что ОДНО И ТО ЖЕ. Его же матричное представление может менять свой вид, но лишь ЗНАНИЕ, что это матричные представления одного и того же инвариантного объекта, РАЗРЕШАЕТ алгоритмически неразрешимую проблему.

«Визуализацию» этого положения мне демонстрировал П.С. Новиков. Он показывает (!) точку, поставленную карандашом на бумаге. Затем предлагает представить себе координатную сетку, нарисованную на кальке. Накладывая эту координатную сетку на бумагу с изображением точки, мы получаем запись $A\ (x_1, y_1)$, где x_1, y_1 — координаты нашей точки в первой координатной системе. Затем берем вторую координатную сетку на кальке и кладем ее сверху первой сетки. Во второй координатной системе та же самая точка получает координаты $B\ (x_2, y_2)$, где x_2, y_2 — координаты нашей точки во второй системе координат. Теперь мы можем получить выражение, которое соответствует булевой переменной:

«Являются ли координаты $A\ (x_1,\ y_1)$ координатами ТОЙ ЖЕ САМОЙ ТОЧКИ, которая имеет координаты $B\ (x_2,\ y_2)$ во второй системе координат?»

Вот здесь возможен ОДИН И ТОЛЬКО ОДИН ОТВЕТ: либо «ДА», либо «НЕТ».

Никакой другой способ не дает «математически чистого» определения булевой переменной. Теперь мы можем получить и ПОНЯТИЕ «АЛГОРИТМ».

Это ПРАВИЛО F, которое позволяет по координатам ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ТОЧКИ, данным в первой системе координат, найти координаты той же самой точки во второй системе координат.

$B\ (x_2, y_2) = F\ A\ (x_1, y_1)$

Фактически существуют три правила, которые позволяют математику говорить «СЛЕДОВАТЕЛЬНО»:

1. Если $A > B$ и $B > C$, то, следовательно, $A > C$.
2. Если $A = B$ и $B = C$, то, следовательно, $A = C$.

3.a. Если $A \in B$ и $B \in C$, то, следовательно, $A \in C$.

3.b. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то, следовательно, $A \subseteq C$.

Устройство математики, благодаря ее аксиоматической конструкции, позволяет передавать ВСЕ, ЧТО ПОНЯТО в вычислительную машину. Это открывает возможность создания «банка теорий», охватывающих все предметные области, т.е. все профессиональные знания.

Подведем итог: аксиомы, которые правильно называть ПРЕДПОЛОЖЕНИЯМИ, не могут рассматриваться без своего «отрицания», т.е. ПРОТИВОПОЛОЖЕНИЯ. Всякое ПОЛОЖЕНИЕ во всех случаях имеет ГРАНИЦУ, за пределами которой оно «превращается» в свою ПРОТИВОПОЛОЖНОСТЬ. Этот переход за ненаблюдаемую в математике ГРАНИЦУ, есть изменение КАЧЕСТВА. Этот переход через ГРАНИЦУ, т.е.

переход к другому КАЧЕСТВУ, порождает известные математические «трудности»: нелинейность, бифуркацию, катастрофу и т.п. — математические термины, выражающие РАЗРЫВ непрерывности, СКАЧОК или изменение ПРАВИЛА.

Именно И. Кант обнаружил, что невозможно описывать реальный мир, если пользоваться ТОЛЬКО УТВЕРДИТЕЛЬНЫМИ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ. Оказалось, что мы нуждаемся в ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ высказываниях. Отдельные части реальности удовлетворяют утвердительным положениям, но существуют и такие части реальности, которые требуют ОТРИЦАНИЯ этих утвердительных положений. Анализ этой ситуации и привел к признанию сосуществования как утверждения, так и его отрицания. Объединение того и другого философы называют СИНТЕЗИСОМ, который охватывает как ТЕЗИС, так и АНТИТЕЗИС. Новое КАЧЕСТВО — есть НОВЫЙ ОБЪЕКТ. Именно он и есть ИНВАРИАНТ математического описания, а «старые» тезис и антитезис — есть не более как его «координатные представления».

Перейдем к третьему вопросу.

3. Почему ЗНАНИЕ математики не гарантирует УМЕНИЯ ей пользоваться в конкретном проектировании систем? Тот, кто когда-нибудь пережил «ОЗАРЕНИЕ» легко поймет, что всякое математическое описание той или иной предметной области, это — ВСПЫШКА, которая так правильно названа «ОЗАРЕНИЕМ». Озарение «не-логично», вернее, оно «не-логично» в смысле математической логики. Если всякий акт творчества, как «не-логичный», можно считать ЧУДОМ, то все творческие люди, хотя они и не волшебники, но они ... «учатся» волшебству.

Если принять во внимание, что каждое такое ЧУДО являет себя в математической форме, то НЕОБХОДИМОСТЬ владения математикой не подлежит сомнению. Тем не менее, как и принято в математике, необходимое условие еще не является условием ДОСТАТОЧНЫМ. Именно эта «недостаточность» чисто математического образования и не позволяет РЕГУЛЯРНО творить ЧУДЕСА.

Здесь нам предстоит вернуться назад на половину тысячелетия. Только к середине пятнадцатого века само понятие «НАУКА» было связано с понятием «ИЗМЕРЕНИЕ», что и было совершено Николаем Кузанским. Последний, завершая эпоху схоластики, отождествлял УМ (по латыни *mens*) с понятием ИЗМЕРЕНИЕ (по латыни *mensurare*). В этом смысле «умный» — это человек «измеряющий». Проблема СООТНЕСЕНИЯ символов математических теорий с показаниями физических приборов — и есть проблема УМЕНИЯ использовать математику в решении прикладных проблем.

Подобно тому, как в приведенных выше формулах, мы встречали различное понимание «математических единиц», подобным образом и в реальном мире мы встречаемся с колоссальным разнообразием ФИЗИЧЕСКИХ ЕДИНИЦ. Проблема соотнесения математических и физических единиц и есть тот узел, который решается ДИАЛЕКТИКОЙ.

Уже двести лет тому назад, не без участия Канта, были сформулированы основные ЭСТЕТИЧЕСКИЕ понятия: чувственное восприятие ДЛИТЕЛЬНОСТИ и чувственное восприятие ПРОТЯЖЕННОСТИ. Мы встречаемся с этими понятиями под названием либо ПРОСТРАНСТВА, либо ВРЕМЕНИ. И здесь мы встречаемся со «злым гением» Минковского. Это с его легкой руки начали считать ПРОТЯЖЕННОСТЬ и ДЛИТЕЛЬНОСТЬ одним и тем же. Если просто помнить, что комплексное сопряжение означает поворот на угол в 90°, то можно понять, что ВРЕМЯ может считаться «ортогональным» к пространственной ПРОТЯЖЕННОСТИ. Мы уже имели исторический опыт Гамильтона, который (следуя Канту) хотел рассматривать алгебру, как НАУКУ О ЧИСТОМ ВРЕМЕНИ, считая ее дополнением к учению о ПРОСТРАНСТВЕ, изучаемому ГЕОМЕТРИЕЙ.

Именно здесь мы можем ПРОТИВОПОСТАВИТЬ как противоположенные два понятия: ГЕОМЕТРИЮ и ХРОНОМЕТРИЮ. Для сохранения исторической преемственности с классической математикой мы будем отождествлять ХРОНОМЕТРИЮ с ГОНИОМЕТРИЕЙ, следуя в этом пункте предложениям Ф. Клейна.

Обратим внимание на РАЗЛИЧИЕ их ЕДИНИЦ. Классические различие единиц длины, площади и объема мы выражаем СТЕПЕНЯМИ (лучше говорить о СТУПЕНЯХ). Совсем иначе обстоит дело с единицами ВРЕМЕНИ. Основная единица ВРЕМЕНИ дается выражением (через углы) по Эйлеру:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Соотношение между пространственными единицами и единицами времени есть соотношение между АДДИТИВНОЙ и МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ группами: сложению ДЛИН соответствует мультипликативное «сложение» УГЛОВ.

Принято считать, что первым обобщением понятия «число» был переход от действительных чисел к комплексным числам. Это неверно, хотя и закреплено исторической традицией. Давно известно, что комплексные числа можно представлять в виде спиноров в матричной форме. Но это не только ФОРМА: разве можно такое понятие как УГОЛ, образуемый пересечением ДВУХ ПРЯМЫХ, обозначить ОДНИМ числом, если уже обычную прямую аналитической геометрии мы не можем представить ОДНИМ числом? Заметим, что РАССТОЯНИЕ в геометрии является всегда

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ, в то же время измерение ДЛИТЕЛЬНОСТИ всегда предполагает ОРИЕНТАЦИЮ, которая отличает ПРОШЛОЕ ВРЕМЯ от БУДУЩЕГО ВРЕМЕНИ. Именно это различие ДЛИТЕЛЬНОСТИ и являет себя как математический термин «ПОРЯДОК». Этот термин невозможно определить с помощью читаемого ТЕКСТА, так как чтение текста ПРЕДПОЛАГАЕТ наличие знания в каком «ПОРЯДКЕ» следуют друг за другом как буквы, так и слова, определяющие сам термин «ПОРЯДОК».

Именно в этом смысле матричное представление УГЛА — есть минимальное обобщение понятия *число*. При матричном представлении углов совершенно очевидно, что СЛОЖЕНИЕ углов мы представляем как ПРОИЗВЕДЕНИЕ соответствующих матриц. Связь между сложением и умножением достигается с помощью логарифмического преобразования, что и приводит как к метрике Кэли, так и к метрике Лобачевского. Корректная «метризация» проективного пространства через углы дает нам связь алгебраических и трансцендентных функций.

Не является предметом данного эссе излагать все дерево теорем, лемм и следствий, которое растет на фундаменте ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ. Уже более четверти века (согласен, что это ничтожно мало, по сравнению с вечностью) я, совместно с Р.О. ди Бартини, пытался побудить к размышлению тех, кто «прикладывает» математику к проектированию систем.

Не является предметом данного эссе и обобщение сказанного не только до многомерных, гильбертовых и *p*-мерных пространств ГЕОМЕТРИИ, но обобщение до многомерного ВРЕМЕНИ, что является предметом ХРОНОМЕТРИИ. Предложение О. Веблена по обобщению Эрлангенской программы Клейна, отвергнутое в Болонье, позволяет совершить переход от гармонического отношения четырех точек проективного пространства к гармоническому отношению ЧЕТЫРЕХ УГЛОВ на проективной плоскости. Этот шаг связывает в одно целое как геометрии Клейна, так и геометрии Римана. Совершенно очевидно, что при дальнейшем развитии, мы будем иметь дело не только с «плоскими», но и многомерными углами.

Понятие «многомерное время» не есть фантом пустого воображения. Социально-экономические системы имеют МЕРУ в форме общественно-необходимого времени на удовлетворение ВСЕХ потребностей. Обратим внимание, что количество названных нами «частных» времен равно количеству «частных» удовлетворяемых потребностей. Эти общественно-необходимые «времена» само изменяется с ходом астрономического времени. И мы должны подумать о разработке правил дифференцирования и интегрирования времени по времени.

Я полагаю, что я обозначил тему, которая может стать подходящей основой для последующего развития ИСКУССТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ РЕАЛЬНОСТИ.